**Ответы, решения и критерии оценивания задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по МАТЕМАТИКЕ (2021 - 2022 уч. год)**

**7 класс**

1. Двое мальчиков Петя и Вася идут из одного и того же дома одновременно в одну и ту же школу. У Пети шаг на 25% короче, чем у Васи, но при этом за одно и тоже время он успевает делать на 25% шагов больше, чем Вася. Кто из них раньше придет в школу?

**Решение**

Примем шаг Васи за 1, тогда шаг Пети 0,75. На каждые 100 шагов Васи приходится 125 шагов Пети. Сделав 100 шагов, Вася пройдет расстояние 100, а Петя за то же время 0,75\*125=75. Поэтому Вася придет быстрее.

**Критерии оценивания**

Получен верный ответ без обоснования - 1 балл.

Обоснованно получен верный ответ -7 баллов.

1. При сложении двух целых чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний нуль на конце и получил в сумме 7182 вместо 3132. Определите слагаемые.

**Решение**

Вычитанием из первой суммы второй находим второе слагаемое, умноженное на 9. Таким образом, искомые числа 2682 и 450.

**Критерии оценивания**

Числа указаны верно, но не указано как они получены - 1 балл.

Обоснованно получен верный ответ -7 баллов.

1. Он одноцветный: красный, синий или зеленый. Если он круглый, то он красный или синий. Если он не круглый, то он не красный и не зеленый. Если он синий или зеленый, то он круглый. Какой он?

**Решение**

Возможно 6 случаев:

1. Он красный и круглый.

2. Он синий и круглый.

3. Он зеленый и круглый.

4. Он красный и некруглый.

5. Он синий и некруглый.

6. Он зеленый и некруглый.

Условие «Если он круглый, то он красный или синий» исключает случай «круглый и зеленый». Условие «Если он не круглый, то он не красный и не зеленый» исключает случаи «не круглый и красный», а также «не круглый и зеленый». Условие «Если он синий или зеленый, то он круглый» исключает случаи «синий и не круглый», «зеленый и не круглый». Значит, он «круглый и красный» или «круглый и синий».

**Критерии оценивания**

Только верный ответ без обоснования - 0 баллов.

Верный ответ с полным и верным обоснованием - 7 баллов.

Допущена логическая ошибка или тот или иной вывод не обоснован - не более 4-х баллов.

Если все случаи не выписаны, то баллы не снижаются.

1. Можно ли по окружности расставить 10 черных и несколько белых фишек так, чтобы каждой черной фишке соответствовала диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стояли рядом?

**Решение**

Так как каждой черной фишке соответствует диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стоят рядом, то фишки должны чередоваться и их поровну.

На полуокружности между черной и белой фишкой стоит девять фишек, поэтому крайние из них одноцветны, следовательно, расстановка невозможна.

**Критерии оценивания**

В решении указано чередование фишек - 2 балла.

Верно обоснована невозможность обозначенной в задаче расстановки - 7 баллов.

1. Клетчатый лист разрезали на квадраты , трехклеточные уголки и полоски . Сколько квадратов могло получиться?

**Решение**

Возьмем за х количество квадратов, за у количество трехклеточных фигур.

Получаем уравнение , из которого находим

1) х=8, 2) х=5, 3) х=2.

Покажем, что на восемь квадратов разрезать невозможно. Для этого введем раскраску.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Каждый квадрат накрывает ровно одну белую клетку, а белых клеток на доске 6. Значит, больше чем шесть квадратов получить нельзя.

Для пяти и для двух квадратов приведены примеры разрезания.

Для пяти квадратов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Для двух квадратов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Критерии оценивания**

Только один верный пример разрезания - 1 балл.

Два верных примера разрезания (для разного количества квадратов ) - 2 балла.

Доказано, что на восемь квадратов разрезать нельзя - 2 балла.

Составлено уравнение для нахождения количества квадратов и количества трехклеточных фигур - 1 балл.

Это уравнение верно решено - 1 балл.

Баллы суммируются.

**8 класс**

1. Предположим, что справедливы следующие утверждения:
2. среди людей, играющих в шахматы, есть такие, кто не интересуется математикой;
3. люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не интересующиеся математикой, не играют в шахматы.

Следует ли из этих утверждений справедливость такого утверждения: не все люди, играющие в шахматы, каждый день купаются в бассейне?

**Решение**

Утверждение «не все люди, играющие в шахматы, каждый день купаются в бассейне» верно. Решение проиллюстрировано на диаграммах Эйлера-Венна.

Множество А - люди, играющие в шахматы, множество В - люди, не интересующиеся математикой, С - люди, каждый день купающиеся в бассейне.

С

В

А

**Критерии оценивания**

Верно проведено рассуждение или справедливость утверждения проиллюстрирована на диаграммах Эйлера-Венна - 7 баллов.

1. Можно ли по окружности расставить 100 черных и несколько белых фишек так, чтобы каждой черной фишке соответствовала диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стояли рядом?

**Решение**

Так как каждой черной фишке соответствует диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стоят рядом, то фишки должны чередоваться и их поровну. На полуокружности между черной и белой фишкой стоит девяносто девять фишек, поэтому крайние из них одноцветны, следовательно, расстановка невозможна.

**Критерии оценивания**

В решении указано чередование фишек - 2 балла.

Верно обоснована невозможность обозначенной в задаче расстановки - 7 баллов.

1. Числа выписаны одно за другим. Сколько всего выписано цифр?

**Решение**

Пусть в числе имеется k цифр, а в числе - m цифр, тогда в искомом числе k+m цифр. следовательно, и k+m=2022.

**Критерии оценивания**

В решении указаны промежуточные оценки, позволяющие выйти на нужную оценку - от 1-3 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за ошибки в рассуждениях - от 1-4 балла в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки - 5 баллов.

Обоснованно получен верный результат - 7 баллов.

1. Имеется 25 мл 70%го раствора уксусной кислоты и 500 мл 5%го раствора уксусной кислоты. Найдите наибольший объем 9%го раствора уксусной кислоты, который можно получить из имеющихся в наличии растворов (водой доливать нельзя).

**Решение**

Пусть берем *x* мл 70%го раствора, а V мл – объем получаемого 9%го раствора. Тогда имеем уравнение

из которого находим

то есть берем 4 части 70%го раствора и 61 часть 5%го раствора.

Наибольший объем 9%го раствора получится тогда и только тогда, когда хотя бы один из имеющихся растворов взят полностью.

Если взять весь 5%й раствор, то 1/65 получаемого раствора составят 500/61 мл. Тогда 70%го раствора нужно взять мл. Это невозможно сделать, так как . Поэтому берем весь 70%й раствор, и в этом случае 1/65 получаемого раствора составят 25/4 мл. Тогда наибольший объем мл.

**Критерии оценивания**

Неверно составлено уравнение по условию задачи - 0 баллов.

Только верно составлено уравнение по условию задачи - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейшем решении допущена вычислительная ошибка при этом ход решения верный, обоснования правильные - 4 балла.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейших рассуждениях есть ошибка, поэтому ход решения неправильный - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Дальнейшее решение верное, но полностью отсутствуют обоснования (есть только вычисления) - 4 балла.

Задача решена правильно, полностью, решение изложено с обоснованиями - 7 баллов.

Если не указано, что для получения наибольшего объема 9%го раствора хотя бы один из имеющихся растворов нужно взять полностью, однако на основе этого соображения осуществляется дальнейшее решение задачи, то баллы не снижаются.

1. Клетчатый лист разрезали на квадраты , трехклеточные уголки и полоски . Сколько квадратов могло получиться?

**Решение**

Возьмем за *х* количество квадратов, за *у* количество трехклеточных фигур.

Получаем уравнение , из которого находим

1) *x*=8, 2) *x*=5, 3) *x*=2.

Покажем, что на восемь квадратов разрезать невозможно. Для этого введем раскраску.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Каждый квадрат накрывает ровно одну белую клетку, а белых клеток на доске 6. Значит, больше чем шесть квадратов получить нельзя.

Для пяти и для двух квадратов приведены примеры разрезания.

Для пяти квадратов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Для двух квадратов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Критерии оценивания**

Только один верный пример разрезания - 1 балл.

Два верных примера разрезания (для разного количества квадратов ) - 2 балла.

Доказано, что на восемь квадратов разрезать нельзя - 2 балла.

Составлено уравнение для нахождения количества квадратов и количества трехклеточных фигур - 1 балл.

Это уравнение верно решено - 1 балл.

Баллы суммируются.

**9 класс**

1. Решите уравнение .

**Решение**

Введем замену

**Критерии оценивания**

Указан только ответ - 0 баллов.

В процессе решения верно выполнено возведение в четвертую степень, но корни не найдены -1 балл.

В процессе решения верно выполнено возведение в четвертую степень и найден один из корней (любым способом: подбором, разложением на множители и т.д.) - 2 балла.

Верно выполнены все этапы решения уравнения и корни найдены - 7 баллов.

1. Вася утверждает, что количество его друзей, хорошо знающих математику, не меньше 96,8% и не больше 97,6%. Известно, что число Васиных друзей не превосходит 150. Определите наибольшее число в указанных пределах, которое не может быть количеством Васиных друзей.

**Решение**

Пусть N - количество друзей Васи. Количество *х* друзей Васи, которые плохо знают математику, находится в диапазоне *0,024N<x<0,032N*, тогда при *x*= 1, при *х*= 2, ; при *х* = 3, при *х* = 4, . Таким образом, искомое наибольшее число ‒ 125.

**Критерии оценивания**

Получен верный ответ с обоснованием - 7 баллов.

При наличии арифметической ошибки - не более 4 баллов.

1. Числа выписаны одно за другим. Сколько всего выписано цифр?

**Решение**

Пусть в числе имеется k цифр, а в числе - m цифр, тогда в искомом числе k+m цифр. следовательно, и k+m=2022.

**Критерии оценивания**

В решении указаны промежуточные оценки, позволяющие выйти на нужную оценку - от 1-3 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за ошибки в рассуждениях от 1-4 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки - 5 баллов.

Обоснованно получен верный результат - 7 баллов.

1. Можно ли по окружности расставить 2n черных и несколько белых фишек так, чтобы каждой черной фишке соответствовала диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стояли рядом?

**Решение**

Так как каждой черной фишке соответствует диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стоят рядом, то фишки должны чередоваться и их поровну. На полуокружности между черной и белой фишкой стоит 2n-1 фишка, поэтому крайние из них одноцветны, следовательно, расстановка невозможна.

**Критерии оценивания**

В решении указано чередование фишек - 2 балла.

Верно обоснована невозможность обозначенной в задаче расстановки - 7 баллов.

1. На следствии по делу об украденном пироге Болванщик заявил, что пирог украл Мартовский Заяц. Мартовский Заяц в свою очередь дал показания, что Соня этого не делала. Соня заявила, что пирог украл Болванщик, а Мартовский Заяц этого сделать не мог. Позже выяснилось, что показания ровно одного из них были ложны и хотя бы один из них пирог украл. Можно ли на основе этих данных установить виновного или исключить невиновного? (Утверждение «А и (а) В» ложно тогда и только тогда, когда ложно хотя бы одно из утверждений А или В)

**Решение**

Если соврал Болванщик, то вместе должны выполняться условия «Мартовский Заяц не крал», «Соня не крала», «Болванщик украл и Мартовский Заяц не крал». Эти условия вместе выполняются. Поэтому Болванщик остается подозреваемым.

Если соврал Мартовский Заяц, то вместе должны выполняться условия «украл Мартовский Заяц», «украла Соня», «Болванщик украл и Мартовский Заяц не крал». Эти условия противоречат друг другу, поэтому Мартовский Заяц не врал. А так как его показания верны, то Соня не воровала пирог.

Если соврала Соня, то по ее показаниям возможны три случая «Болванщик не крал и Мартовский Заяц украл», «Болванщик не крал и Мартовский Заяц не крал», «Болванщик украл и Мартовский Заяц украл». При этом выполняются условия в показаниях остальных последственных: «Мартовский Заяц украл», «Соня не крала». Отсюда делаем вывод, что Мартовский Заяц и Болванщик остаются подозреваемыми, а Соня невиновна.

Таким образом, установить виновного на основе этих данных нельзя, а исключить невиновного можно.

**Критерии оценивания**

Только верный ответ - 0 баллов.

Верное и полное решение задачи - 7 баллов.

Есть только верное и полное объяснение того, что «Соня невиновна» - 2 балла.

Верный ответ, но полный перебор не сделан - 2 балла.

Верный ответ и сделан полный перебор, но допущена логическая ошибка (например, не указан один из случаев при условии, что соврала Соня) - 4 балла.

Верный ответ и сделан полный перебор, но отсутствует обоснование того или иного вывода (например, в одном из случаев не соотнесены показания всех подозреваемых) - 4 балла.

**10 класс**

1. Решите в целых числах уравнение .

**Решение**

При слева получается нечетное число, а четное, поэтому решений нет.

При получаем .

При получаем уравнение, которое не имеет целого решения для .

При выражение слева принимает значения большие 1, но меньшие 2. Поэтому целого решения уравнения для нет.

Поэтому уравнение имеет единственное решение , .

**Критерии оценивания**

Только верный ответ - 1 балл.

Верно и полно рассмотрен случай неотрицательных значений - 2 балла.

Верно и полно рассмотрен случай для отрицательных значений - 4 балла.

Баллы суммируются.

1. Доказать, что найдется число вида 20212021…2021…20210…0, которое делится на 2022.

**Решение**

Запишем числа 2021, 20212021, 202120212021,….,2021….2021. В последнем числе запись 2021 повторяется 2022 раза. Рассмотрим остатки от деления каждого из этих чисел на 2022.

Ни одно из записанных чисел, не делится на число 2022 , так как все они нечетные. Записанных чисел больше, чем ненулевых остатков, поэтому найдутся два из них с одинаковым остатком. Их разность имеет требуемый вид и делится на 2022.

**Критерии оценивания**

Обоснованно проведенное доказательство - 7 баллов.

Приведены отдельные рассуждения, значимые для доказательства - от 1-4 баллов.

За неточности в рассуждениях снимать от 1 до 2 баллов.

1. Имеется 250 мл 70%го раствора уксусной кислоты и 500 мл 5%го раствора уксусной кислоты. Найдите наибольший объем *p*%го раствора уксусной кислоты, который можно получить из имеющихся в наличии растворов (водой доливать нельзя).

**Решение**

Пусть берем x мл 70%го раствора, а V мл – объем получаемого *p*%го раствора. Тогда имеем уравнение

из которого находим

То есть берем частей 70%го раствора и частей 5%го раствора.

Наибольший объем 9%го раствора получится тогда и только тогда, когда хотя бы один из имеющихся растворов взят полностью.

Если взять весь 5%й раствор, то 1/65 получаемого раствора составят мл. Тогда 70%го раствора нужно взять мл. Это возможно сделать, если . Решением неравенства с учетом условия являются значения , удовлетворяющие условию . При этих значениях наибольший объем равен мл.

В противном случае берем весь 70% раствор, то 1/65 получаемого раствора составят мл. Тогда 50%-го раствора нужно взять мл. Это возможно сделать, если . Решением неравенства с учетом условия являются значения , удовлетворяющие условию . При этих значениях наибольший объем равен мл.

**Критерии оценивания**

Неверно составлено уравнение по условию задачи - 0 баллов.

Только верно составлено уравнение по условию задачи - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейшем решении допущена вычислительная ошибка или ошибка в преобразовании выражения, решении неравенства, при этом ход решения верный, обоснования правильные - 4 балла.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейших рассуждениях есть ошибка, поэтому ход решения неправильный - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Дальнейшее решение верное, но полностью отсутствуют обоснования (есть только вычисления, преобразования) - 4 балла.

Задача решена правильно, полностью, решение изложено с обоснованиями - 7 баллов.

Если не указано, что для получения наибольшего объема 9%го раствора хотя бы один из имеющихся растворов нужно взять полностью, однако на основе этого соображения осуществляется дальнейшее решение задачи, то баллы не снижаются.

1. В прямоугольном треугольнике с катетами и (>) расположены две одинаковые окружности. Окружности касаются друг друга внешним образом и каждая из них касается гипотенузы и одного из катетов. Найдите радиус такой окружности.

**Решение**

****

1. Обозначим O и Q центры этих окружностей. OQ параллельна гипотенузе, так как центры окружностей находятся на одинаковом от нее расстоянии и по одну сторону.
2. Обозначим NM касательную к этим окружностям, проходящую через точку касания этих окружностей друг с другом. NM перпендикулярна OQ (так как касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания). Следовательно, NM перпендикулярна гипотенузе.
3. Обозначим за К точку пересечения прямых NM и ВС.

Треугольник МСК подобен треугольнику ВСА по двум углам.

Треугольник МNА подобен треугольнику ВСА по двум углам.

Значит, треугольники МСК и МNА подобны.

А поскольку в эти треугольники вписаны равные окружности, то они равны.

Поэтому МN=МС, МК=МА.

Так как МN=МС, то NP=CR (P – точка касания окружностей, R – точка касания окружности с гипотенузой, равенство отрезков объясняется тем, что они есть отрезки МN и МС без радиуса вписанной окружности).

Так как МК=МА, то КР=AF (F – точка касания второй окружности с гипотенузой, равенство отрезков объясняется тем, что они есть отрезки МК и МА без радиуса вписанной окружности).

1. Введем обозначения r – радиус окружности, x и y – длины отрезков касательных, проведенных из вершин треугольников к окружностям.

Длина гипотенузы равна, с одной стороны , а с другой стороны .

Поэтому получаем уравнение .

Также ВN=AВ-x-y=а-x-y, КВ=КС-ВС=х+у-b.

1. Поскольку углы при вершине N вертикальные и они равны углу при вершине С (из подобия треугольников МNА и ВСА), а угол В прямой, то треугольник КВN подобен треугольнику АВС.

Значит,

Получаем уравнение *,* из которого .

Из равенства выражаем

Из полученных условий находим .

**Критерии оценивания**

Доказано, что прямая, проходящая через центры окружностей, параллельна гипотенузе и что касательная, проведенная к окружностям в точку их касания, перпендикулярна гипотенузе – 1 балл.

Доказано, что треугольники МСК и МNА (здесь указано в авторских обозначениях) равны – 2 балла..

Указаны все равные отрезки касательных (нужные для дальнейшего решения) и составлено уравнение (здесь указано в авторских обозначениях) – 1 балл.

Указаны все равные отрезки касательных (нужные для дальнейшего решения), доказано подобие треугольников КВN и АВС и составлено уравнение (здесь указано в авторских обозначениях) – 2 балла.

Из уравнений и выражен - 1 балл.

Баллы суммируются.

1. Решите неравенство - 2.

**Решение**

Пусть . Тогда первоначальное неравенство преобразуется к системе неравенств

решением которой является только .

Решая уравнение , находим .

**Критерии оценивания**

Верное обоснованное решение – 7 баллов.

Допущена вычислительная ошибка, но с ней решение верно доведено до конца (может быть получен неверный ответ) – 1 балл.

Допущена ошибка в преобразованиях, которая исказила ход решения задачи – 0 баллов.

При равносильном переходе (в решении, аналогичном авторскому) потеряно условие - 4 балла.

**11 класс**

1. Решите в целых числах уравнение .

**Решение**

При слева получается нечетное число, а четное, поэтому решений нет.

При получаем .

При получаем уравнение, которое не имеет целого решения для .

При выражение слева принимает значения большие 1, но меньшие 2. Поэтому целого решения уравнения для нет.

Поэтому уравнение имеет единственное решение , .

**Критерии оценивания**

Только верный ответ - 1 балл.

Верно и полно рассмотрен случай неотрицательных значений - 2 балла.

Верно и полно рассмотрен случай для отрицательных значений - 4 балла.

Баллы суммируются.

1. Решить неравенство .

**Решение**

Рассмотрим разность , , Таким образом, угол положителен и лежит в первой четверти. Значит, полученное произведение косинуса на синус положительно и разность также положительна. Следовательно, <1, и исходное неравенство решений не имеет.

**Критерии оценивания**

Доказано, что неравенство решений не имеет - 7 баллов.

Выполнены промежуточные выкладки или оценки, важные для продвижения в решении - от 1 до 4 баллов.

Допущены ошибки в оценке значений синуса, косинуса или углов - не более 2 баллов.

1. Иван Царевичу нужно раздобыть молодильные яблоки. Баба Яга, Кощей и Леший дали ему следующие ответы.

Баба Яга: «Да у Кощея они. Забрал и уже 100 лет как не отдает. А Леший – добрый малый: если были бы они у него, то дал бы мне».

Кощей: «Баба Яга – плутовка, спрятала, у нее они, а у меня их нет».

Леший: «Нет у меня их. Зачем они мне? Я и без них красивый. И у Бабы Яги их нет: совсем старая стала».

Василиса Премудрая предупредила Ивана, что вся эта троица – врунишки, правды никто из них никогда не скажет, а молодильные яблоки хотя бы у одного из них есть.

У кого есть молодильные яблоки? У кого их нет? О ком недостаточно информации? (Утверждение «А и В» ложно тогда и только тогда, когда ложно хотя бы одно из утверждений А или В)?

**Решение**

По показаниям Кощея делаем вывод, что у Бабы Яги яблок нет или у него они есть.

Рассмотрим случай, что у Бабы Яги яблок нет.

Тогда Леший в одной части своих показаний про Бабу Ягу не соврал. Поэтому показания Лешего о том, что у него яблок нет – ложь. Таким образом, устанавливаем, что яблоки у Лешего. Показания Лешего соединены связкой «и», поэтому для их ложности достаточно ложности одного из условий.

Баба Яга в одной части своих показаний утверждает, что «Если яблоки есть у Лешего, то есть и у нее». А поскольку у Лешего они есть, а у нее их нет, как было установлено из показаний остальных фигурантов дела, то в этой части своих показаний Баба Яга солгала. Значит, показания о Кощее могут быть правдой, а могут быть ложью, поскольку оба своих утверждения Баба Яга также соединила связкой «и».

Таким образом, у Лешего яблоки есть, у Бабы Яги их нет, а по Кощею недостаточно информации.

Рассмотрим случай, что у Кощея яблоки есть, тогда Баба Яга в одной части своих показаний не соврала, тогда вторая часть ложь, то есть у Лешего есть яблоки, а у нее их нет. Показания Лешего тогда тоже ложны, так как он утверждал, что у него яблок нет.

Таким образом, получаем, что у Лешего яблоки есть, у Бабы Яги их нет, а у Кощея есть.

Общий вывод: у Лешего яблоки есть, у Бабы Яги их нет, а по Кощею недостаточно информации.

**Критерии оценивания**

Только верный ответ - 0 баллов.

Есть только верное и полное объяснение того, что «у Бабы Яги их нет» - 2 балла.

Есть только верное и полное объяснение того, что «у Лешего яблоки есть» - 2 балла.

Есть только верное и полное объяснение того, что «по Кощею недостаточно информации» - 2 балла.

Два случая из трех перечисленных – 4 балла.

Получен верный ответ и сделан полный перебор с обоснованиями – 7 баллов.

Верный ответ и сделан полный перебор, но допущена логическая ошибка (например, не указан один из случаев при том или ином условии) - 4 балла.

Верный ответ и сделан полный перебор, но отсутствует обоснование того или иного вывода (например, в одном из случаев не соотнесены все данные) - 4 балла.

1. Докажите, что для любого натурального верно неравенство

**Решение**

Найдем компактное выражение для суммы .

и т.д. Отсюда предполагаем, что .

Докажем это равенство с помощью метода математической индукции.

База индукции выполняется.

Докажем индукционный шаг: если , то .

Действительно,

Неравенство верно, поскольку числитель меньше знаменателя.

**Критерии оценивания**

Проверка справедливости неравенства для нескольких первых слагаемых – 0 баллов.

Формула получена, но не доказана – 4 балла.

Верное и полное решение – 7 баллов.

5. В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 AB=1см, AD=2, AA1=1. Найти наименьшую площадь треугольника PA1C, вершина Р которого лежит на прямой AB1.

**Решение**

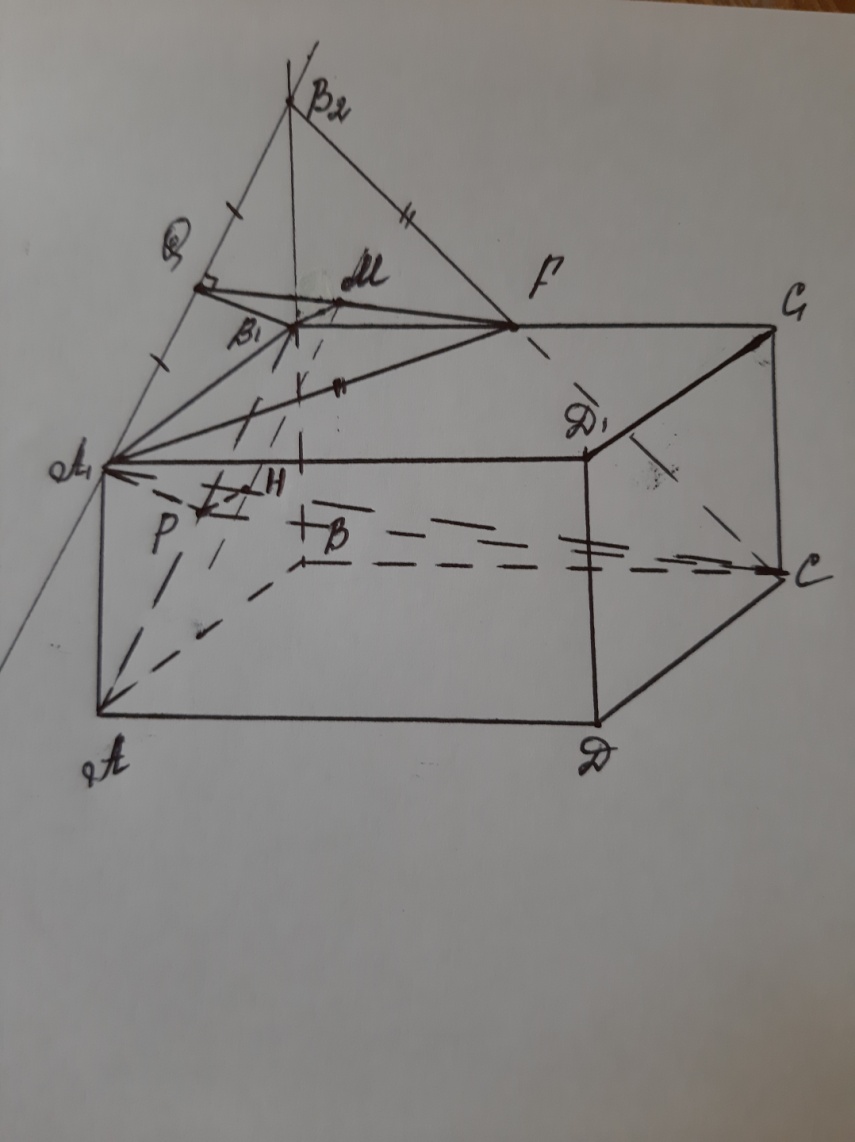
Площадь треугольника PA1C равна , где - расстояние от точки P, взятой на прямой AB1, до прямой A1C. Площадь будет наименьшей при наименьшем значении длины отрезка то есть в том случае, когда - общий перпендикуляр к прямым A1C и AB1.

Построим общий перпендикуляр к прямым A1C и AB1. Через прямую A1C построим плоскость параллельную прямой AB1. Для этого через точку A1 проведем прямую параллельную AB1 . Точка B2 - точка пересечения этой прямой с прямой ВB1. Искомая плоскость (А1B2С).

Рассмотрим плоскость (QB1F): прямая QB1 перпендикулярна прямой А1B2, которая в свою очередь параллельна прямой AB1, прямая B1F перпендикулярна прямой AB1. Значит плоскость (QB1F) перпендикулярна прямой AB1.

Проекцией прямой AB1 на плоскость (QB1F) является точка B1, а прямой A1C на эту же плоскость - прямая QF. Значит искомое расстояние между скрещивающимися прямыми A1C и AB1 равно высоте треугольника QB1F, опущенной из вершины B1 к стороне QF. На чертеже это отрезок B1M.

Из треугольника А1B2B1 находим QB1=. Из треугольника B1FQ находим B1M==. Таким образом, искомая площадь .



**Критерии оценивания**

На основе правильных рассуждений получен верный ответ - 7 баллов.

Получен вывод, что площадь будет наименьшей при использовании в качестве высоты треугольника расстояния между скрещивающимися прямыми A1C и AB1 -1 балл.

Верно указан (построен) отрезок длина которого является расстоянием между прямыми A1C и AB1 - 3 балла.